جامعة البعث | امتحان مقرر الدوال محدودة التغير | اسم الطالب :
كلية العلوم | الفصل الثالث للعام 2014/ 2015 | الدرجة : 100
قسم الرياضيات | السنة الثالثة - رياضيات | المدة : 90 دقيقة

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول (35 درجة):

1) إذا كانت الدالة f ذ ت م و قيوسة على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أن الدالة $|f|$ ذ ت م و قيوسة على نفس الفترة باستخدام التعريف لكل مفهوم ، و أحسب تغيرها الكلي عليها .

2) هل التكامل: $\int_0^3 [x]\, d[x]$ موجود حسب ستيلجس ؟ و لماذا ؟ وهل دالة الجزء الصحيح ذ ت م على الفترة $[0,3]$ ؟ مع التعليل ؟ .

3) بين أن الدالة : $g(x)=\frac{1}{x+3}$ محدودة تقريباً في كل مكان على المجموعة R ، وأنها مستمرة مطلقاً اعتماداً على شرط ليبشيتز على الفترة $[1,4]$ ، ثم أوجد دالة التغير لها على هذه الفترة .

السؤال الثاني (30 درجة):

1) وضح ، إن كان للدالة h مشتقاً موجباً و محدوداً على الفترة $[a,b]$ ، فهل بالإمكان أن تكون كمولة حسب ريمان و ليبيغ عليها .

2) ناقش حال المجموعتين: المجموعة وحيدة العنصر $\{a\}$ & Q (الأعداد العادية) من حيث أنها بوريلية - مقيسة ثم احسب قياس كل منهما حسب ليبيغ مع ذكر تعريف قياس ليبيغ و جبر بوريل .

3) تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J=\int_0^2 x^2\, d\, g(x) = \quad ; \quad g(x)=\begin{cases} x^2 & ;\ 0\le x<1 \\ 5 & ;\ x=1 \\ x+5 & ;\ 1<x\le 2 \end{cases}$$

ثم أحسبه في حال وجوده .

السؤال الثالث (35 درجة):

1) اذكر كافة شروط القياس الخارجي على $P(X)$ ، حيث أن $X \neq \phi$ مجموعة ما ، ثم اثبت أنه إذا كان: $\mu^*(G)=0$ فإن: $\mu^*(E)=\mu^*(E-G)$

2) هات مثالاً على دالة بشرط أن تكون مستمرة و قيوسة ، و ليست مستمرة مطلقاً و ليست ذ ت م على الفترة $[a,b]$ مع الحل ، و ما هو تغيرها الكلي على هذه الفترة عندئذ

3) ليكن μ قياس العد على جبر تام (أي الذي يعطي عدد عناصر مجموعة ما) ، ومنه فأوجد قياس كل من المجموعات : $\{1,2,3\}$, $\{10^3\}$, Z , $[0,2]$

ثم بين أن صف المجموعات المقيسة m_μ جبراً تاماً على X غير الخالية حيث μ^* قياس خارجي على $P(X)$.

---------------------------------انتهت الأسئلة---------------------------------

حمص في 27 / 8 / 2015 أتمنى لكم التوفيق مدرس المقرر: د.محمد عامر

توزيع درجات مقرر الدوال محدودة التغير

باسم العميد

كلية العلوم — الدورة الإضافية للعام $\frac{2014}{2015}$ — الدرجة: 100

قسم الرياضيات — السنة الثالثة - رياضيات

س1 (35°): (1) لتكن P تجزئة للفترة $[a,b]$ و f ذات تغير محدود

أن $|f|$ ذات تغير محدود بالترتيب ونبرهن ذلك:

$$v(|f|;P)=\sum_{k=1}^{n}\big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\big| \le \sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \le \bigvee_a^b(f)$$

ومنه نجد أن $|f|$ ذات تغير على $[a,b]$ وتغيرها الكلي هو: $\bigvee_a^b(|f|) \le \bigvee_a^b(f)$

(20)

القيوسية لدينا:

$$E(|f|>c)=\begin{cases} E & ; c<0 \\ E(f>c)\cup E(f<-c) & ; c\ge 0 \end{cases} \quad ; E=[a,b]$$

من هذا نجد أن المجموعة $E(|f|>c)$ مقيسة أياً كان $c\in\mathbb{R}$ وبالتالي فإن $|f|$ مقيسة على $[a,b]$

ب) التكامل غير موجود حسب ستيلجس لأن الدالتين غير مستمرتين من اليسار عند أي عدد صحيح في الفترة $[0,3]$ مع أنهما محدودتين عليها، ودالة الجزء الصحيح كانت متزايدة في هذه الفترة وبالتالي فإنها ذات تغير في $[0,3]$

ب) الدالة g محدودة في المجموعة $\mathbb{R}-\{-3\}$ ولذلك محدودة تقريباً في $\mathbb{R}$ لأن المجموعة الوحيدة الصفر $\{-3\}$ والتي قياسها لوبيغ يساوي الصفر (أي $\lambda(\{-3\})=0$)

(15)

الاستمرار المطلق وشرط Lip هو: $|f(x)-f(y)| \le M|x-y| \; ; x,y\in[1,4]$

$$\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}\right| = \left|\frac{y+x}{(1+x)(1+y)}\right| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \le \frac{1}{4}|x-y| \; ; \forall x,y\in[1,4]$$

أي الفترة مغلقة لذا تحقق شرط Lip في $[1,4]$

دالة التغير: هذه الدالة رتيبة ومتناقصة تماماً في $[1,4]$ وبالتالي ذات تغير محدود على كل مجال $[1,x]$ ولنفرض $1<x\le 4$

$$v_g(x)=\begin{cases} \bigvee_1^x(g) & ; 1<x\le 4 \\ 0 & ; x=1 \end{cases}$$

يتبع ←

$$= \begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} & ; \; 1 < x \leq 4 \\ 0 & ; \; x = 1 \end{cases}$$

وهي دالة تغير محدود على $[1,4]$.

---

(6) س٢ (30°)، (1) لنفرض أن للدالة h مشتقة محدودة h' والدالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ والمقدار مشتقة محدودة وبالتالي فهي قابلة للتكامل ريمانياً ... [illegible]

(12) (2) بما أنه يمكن كتابة المجموعة وحيدة العنصر كتقاطع عدد قابل للعد من المجموعات المفتوحة فهي بوريلية وبالتالي فإن مجموعة Q ... [illegible] ... محدودة بوريلية وقياس لبيغ لها يساوي الصفر

قياس لبيغ: إذا كان المقاس الخارجي λ^* و $\mathcal{L}$ صنف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لـ λ^* فإن ... على $\mathbb{R}$ وكل $E \in \mathcal{L}$ نسميه قياس لبيغ ونرمز له $\lambda(E)$.

حقل بوريل: هو أصغر حقل يحتوي المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ ونرمز له بـ $\beta(\mathbb{R})$ وكل عنصر فيه يسمى مجموعة بوريلية.

(12) (3) وجود تكامل ستيلتجس: الدالة $f(x) = x^2$ مستمرة على $[0,2]$ والدالة g مشتقتها الدالة g' محدودة على هذه الفترة ما عدا $x=1$ وبهذا فهو موجود [illegible]

$$\delta = \int_0^1 x^2 \cdot 2x \, dx + \int_1^2 x^2 \cdot 1 \cdot dx + (1)^2 \left[g(1+0) - g(1-0) \right]$$

لأن $x=1$ انقطاع لـ g من النوع الأول:

$$= 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{2}\right]_1^2 + 6 - 1 = \frac{1}{2} + 4 - \frac{1}{2} + 5 = 9$$

ت ح

من $\mu^* Y$ مسمى $P(X)$ قياس خارجي اذا

س (35°) ١) شروط القياس الخارجي على $P(X)$ حيث $X \neq \phi$

$1)\ \mu^*(\phi)=0,\qquad 2)\ \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)\ ;\ E_n \in P(X)$

كشه

$3)\ \text{if } A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)\ ;\ A,B \in P(X)$

شرط التزايد.

٢) إثبات ما سبق إذا كان $\mu^*(G)=0$.

البرهان: $E \subseteq (E-G)\cup G$ و $E-G \subseteq E$ منطقياً

$\mu^*(E) \le \mu^*(E-G)+\mu^*(G) = \mu^*(E-G)+0 \le \mu^*(E)$

(23)

اذاً $\mu^*(E) = \mu^*(E-G)$

2) الدالة $h(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} ; & 0<x\le 1 \\ 0 ; & x=0 \end{cases}$ مستمرة على $[0,1]$ ولكنها ليست ذات تغير محدود

ولكن كأنسب لتجزئة $[0,1]$ ولتكن بأخذ التجزئة

$P_n = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$

نجد بالحساب أن:

$V(h;P_n) = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} = V_n$

وبما أن V_n لانهائية غير محدودة (لأن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة)، وبالتالي لانهائية ...

وبشرح ذلك نجد

$V_0^1(h) = \infty$

3) القياس ... العد ... حيث تام ومثاله.

$\mu([0,2])=\infty,\ \mu(\mathbb{Z})=\infty,\ \mu(\{10^3\})=1$

$\mu(\{1,2,3\}) = 3$

(12)

بيان أن $\mathcal{M}_{\mu^*}$ جبر-σ على X وذلك بالتحقق من شروطه:

① $\phi, X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ، ② من أجل أي متتالية $\{E_n\}$ من $\mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

③ من ملاحظة، إذا كان $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن $\tilde{E} \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. إذاً الصف جبر-σ على X

نهاية الأجوبة

في 2015/8/27

أستاذ المقرر

د. محمد ...